Chapitre 13 - Espaces vectoriels

Ce chapitre introduit la structure fondamentale d'*espace vectoriel* qui forme la base de l'algèbre linéaire. Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 - Espace vectoriel. Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ est un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble et $+$ et $\cdot$ des lois vérifiant les propriétés suivantes :

- **Loi d'addition interne « $+$ » :**
  - **(i)** (*associativité de* $+$) pour tous $x, y, z \in E$, $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$;
  - **(ii)** (*commutativité de* $+$) pour tous $x, y \in E$, $\quad x+y = y+x$;
  - **(iii)** (*neutralité pour* $+$) il existe un élément de E, noté 0_E et nommé *vecteur nul de* E, tel que,
  $$\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x \ ;$$
  - **(iv)** (*opposé pour* $+$) pour tout $x \in E$, il existe un élément de E, noté $-x$ et nommé *opposé de* x, tel que
  $$x + (-x) = (-x) + x = 0_E \ ;$$
- **Loi de multiplication externe « $\cdot$ » :**
  - **(v)** (*neutralité mixte*) pour tout $x \in E$, $\quad 1 \cdot x = x$;
  - **(vi)** (*distributivité mixte 1*) pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
  - **(vii)** (*distributivité mixte 2*) pour tout $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
  - **(viii)** (*associativité mixte*) pour tout $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$, qui agissent par l'intermédiaire de la loi externe $\cdot$ sur ceux de E, des *scalaires*. La loi $+$ est appelée *addition* et la loi $\cdot$ *multiplication par un scalaire*.

Remarque 2 Ce que l'on appellent « lois » sont en réalité des applications de $E \times E$ dans E (pour l'addition) et de $\mathbb{K} \times E$ dans E (pour la multiplication par un scalaire).

Les mathématiciens ont introduit la structure d'espace vectoriel, hermétique au premier abord, car ils ont remarqué que cette structure est omniprésente en mathématiques. Ainsi, en mener l'étude systématique s'est imposée.

On peut évidemment s'interroger sur l'origine de la terminologie d'« *espace vectoriel* » et de « *vecteurs* » dans un cadre aussi abstrait. La réponse étant que les règles de la définition précédentes sont exactement celles classiquement vérifiées par les vecteurs usuels du plan et de l'espace. Dorénavant, les vecteurs pourront désigner des objets aussi divers que des matrices, des fonctions ou des suites, que l'on pourra ainsi s'efforcer de visualiser géométriquement.

Remarque 3

- Un espace vectoriel E est nécessairement non vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul 0_E.
- On écrit la plupart du temps « λx » en lieu et place de « $\lambda \cdot x$ », pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs $\vec{x}$ avec une flèche. En revanche, on utilise usuellement la notation plus légère sans flèche pour les vecteurs d'un espace vectoriel. Il faut donc être vigilant et veiller à ne pas confondre vecteurs et scalaires.
- Comme le suggère leurs notations, le vecteur nul 0_E et l'opposé $-x$ d'un vecteur x de E sont UNIQUES. En effet :
  - ⋆ si $0'_E$ désigne aussi un élément neutre pour l'addition, alors $0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$;

⋆ si x' désigne aussi un opposé de x pour $+$, alors

$$x' = x' + 0_E = x' + (x + (-x)) = (x' + x) + (-x) = 0_E + (-x) = -x.$$

- De façon générale, l'addition dans E jouit des mêmes propriétés que l'addition dans les ensembles classiques de nombres, *e.g.* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; notamment, la règle de simplification suivante est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = x + z \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

Théorème 4 - Règles de calcul dans un espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \;$ ou $\; x = 0_E$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $\quad -x = (-1) \cdot x$, $\quad$ où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

(i) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ et, après simplification, $0 \cdot x = 0_E$.
- $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$ et, à nouveau par simplification, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- Si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$, ainsi $-x = (-1) \cdot x$.

■

✖ **Attention !** ✖ On veillera à ne pas confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel E avec 0 l'élément nul de l'ensemble des scalaires $\mathbb{K}$. 0_E est un vecteur tandis que 0 est un scalaire !

Exemple 5 $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la multiplication classique $\times$ dans $\mathbb{K}$ étant assimilée à la loi externe « $\cdot$ ».

Exemple 6 - Familles de scalaires. L'ensemble $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}^{n \text{ fois}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, muni des lois

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \; \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

On retrouve ici le cadre des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.
Par exemple, $(1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$ – les opérations se faisant coordonnées par coordonnées.

Notez que l'exemple précédent est un cas particulier d'un produit cartésien d'espaces vectoriels, mais cet exemple suffit amplement plutôt que de faire un énoncé général.

Exemple 7 - Matrices. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Exemple 8 - Polynômes. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. C'est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Proposition 9 - Espace vectoriel de fonctions. Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble E^X des fonctions de X dans E, naturellement muni de ses règles d'additions et de multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.

Les deux exemples suivants tombent dans le cadre de cette proposition :

Exemple 10 - Fonctions et suites réelles.

- Pour tout intervalle I non vide, l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel (il s'agit du théorème précédent avec $X = I$ et $E = \mathbb{R}$).
- On peut raffiner en montrant que $C^0(I, \mathbb{R})$ ou $C^1(I, \mathbb{R})$ sont aussi des espaces vectoriels. Nous aurons bientôt des outils pour éviter de vérifier tous les axiomes.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un réel (il s'agit du théorème précédent avec $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$).
- L'exemple 7 est un aussi un cas particulier de la proposition précédente avec $X = [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!]$ et $E = \mathbb{K}$.

Exemple 11 Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En particulier, $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En effet, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\lambda \cdot x$ est défini pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, donc en particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui justifie que l'on puisse considérer E comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, par restriction de l'ensemble des scalaires.

✖ Attention ! ✖ Nous avons vu une longue liste d'ensembles qui sont des espaces vectoriels. Combien pouvez-vous en citer ?
Il y a un piège dangereux : il n'y a aucune raison qu'un espace vectoriel quelconque dispose d'un produit interne. Ainsi, même si les « vecteurs » ont perdu leur flèche, étant donné un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque, et x et y deux éléments de E, on évitera de faire le produit xy, qui n'a aucune raison d'avoir un sens.
Bien entendu, certains espaces vecoriels possèdent un produit interne, mais ce sont des cas particuliers souvent différents les uns des autres.

Exemple 12 Les ensembles suivants du plan sont-ils des espaces vectoriels ?

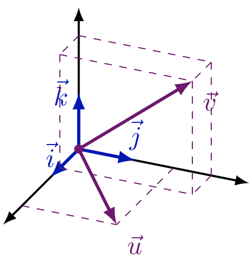
- L'ensemble $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2), -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.
- L'ensemble $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2), xy = 0\}$.
- Une droite de $\mathbb{R}^2$ ne passant pas par l'origine. Et si elle passe par l'origine ?

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 13 - Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle *combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ tout vecteur de E de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (les *coefficients* de la combinaison linéaire).

Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (mélanges d'additions et de multiplications par des scalaires).

Cette notion se conçoit géométriquement très simplement dans le plan ou l'espace. Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, mais ce n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.



✖ Attention ! ✖ **Péché d'identification.**

$$\text{En général :} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \quad \not\Longrightarrow \quad \lambda_k = \mu_k, \text{ pour tout } k \in [\![1\,,n]\!].$$

Par exemple : $(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0)$.

Exemple 14 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $(2,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5,-2)$ et $(1,-3)$

En effet,

$$\begin{aligned}(2,7) \text{ est combinaison linéaire de } (5,-2) \text{ et } (1,-3) &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R},\quad (2,7) = \lambda(5,-2)+\mu(1,-3)\\ &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2\\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire. Or, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2\\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2\\ 13\lambda & & & = & 13 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \iff \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = -3.$$

Ainsi, le système étudié possède des solutions, comme souhaité.

Exemple 15 Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que tout vecteur est combinaison linéaire des vecteurs $(1,2,3)$, $(2,5,6)$ et $(1,5,4)$.

Exemple 16 Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

En effet, $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}&\iff \exists x,y,z\in\mathbb{R},\quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &\iff \exists x,y,z\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1\\ x & + & y & & & = & 2\\ & & 3y & - & z & = & 2\\ & & 2y & + & z & = & 0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire. Or, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1\\ x & + & y & & & = & 2\\ & & 3y & - & z & = & 2\\ & & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1\\ & & 3y & - & z & = & 3\\ & & 3y & - & z & = & 2\\ & & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2 - L_1\\ \\ \\ \end{array} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1\\ & & 3y & - & z & = & 3\\ & & & & 0 & = & -1\\ & & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3\leftarrow L_3 - L_2\\ \\ \end{array}$$

Le système est donc incompatible, d'où le résultat.

Exemple 17 Soit $n\in\mathbb{N}$. Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ puisque l'on peut l'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour certains $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 18 - Sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E STABLE PAR ADDITION ET PAR MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E lorsque F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ de E.

Notamment, pour un sous-espace vectoriel F de E, $0_F = 0_E \in F$ et F est nécessairement une partie non vide de E. L'égalité $0_F = 0_E$ résulte de l'unicité de l'élément neutre pour l'addition dans F.

Exemple 19 - Sous-espaces vectoriels triviaux. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E – parfois dits *triviaux*. Notamment $\{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel – parfois dit *trivial*.

Exemple 20 La partie $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + x + y^2 = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

En effet, F n'est pas stable par multiplication par un scalaire, puisque $(-1,0) \in F$ tandis que $(-2,0) = 2(-1,0) \notin F$. Ni par addition d'ailleurs, puisque $(-2,0) = (-1,0) + (-1,0)$.

Théorème 21 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. S'équivalent :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E ;

(ii) $\begin{cases} \bullet \quad 0_E \in F \ ; \\ \bullet \quad F \text{ est stable par combinaison linéaire : } \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad \lambda x + \mu y \in F. \end{cases}$

Démonstration.

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii).** Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a vu que $0_E = 0_F \in F$. De plus, pour tous $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, λx et μy sont des éléments de F, partie stable de E par multiplication par un scalaire, et enfin $\lambda x + \mu y \in F$, car F est stable par addition.
- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii).** Si l'assertion **(ii)** est vraie, F est en particulier stable par addition (pour $\lambda = \mu = 1$) et multiplication par un scalaire (pour $y = 0_E$). En outre, pour tout $x \in F$, l'opposé $-x$ de x dans E appartient aussi à F (pour $\lambda = -1$ et $y = 0_E$). Les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels ne requièrent aucune vérification particulière puisqu'une relation vraie sur E tout entier l'est aussi sur F.

■

Exemple 22 La partie $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - 3y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ En pratique ✎

- Pour établir qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, on utilisera TOUJOURS la caractérisation précédente, qui évite de vérifier les 8 axiomes de la définition d'un espace vectoriel !
- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est SOUS-espace d'un autre espace vectoriel connu. D'où l'importance des espaces vectoriels classiques donnés en exemple précédemment (exemples et théorèmes 5 à 10).

Théorème 23 - Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions du système linéaire HOMOGÈNE $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ PASSANT PAR $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ PASSANT PAR $(0,0,0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\}$ des solutions. Clairement $\mathcal{S} \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $0_{p,1} \in \mathcal{S}$, puisque $A \times 0_{p,1} = 0_{n,1}$. Montrons en outre que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire : soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $X, X' \in \mathcal{S}$,

$$A(\lambda X + \lambda' X') = \lambda AX + \lambda' AX' = \lambda \times 0_{n,1} + \lambda' \times 0_{n,1} = 0_{n,1},$$

ainsi $\lambda X + \lambda' X' \in \mathcal{S}$. ■

Remarque 24 Le théorème précédent établit ainsi que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. En effet, un tel système équivaut à une équation matricielle $AX = 0$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et les éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ s'identifie à ceux de $\mathbb{K}^p$ par transposition.

Exemple 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient la matrice nulle et nous avons déjà observé que toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures en est encore une.

Exemple 26 - Espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, on a

- $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$;
- $0 \in \mathbb{K}_n[X]$, puisque $\deg 0 = -\infty \leqslant n$;
- $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire, puisque, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\} \leqslant n$.

✖ **Attention !** ✖ L'ensemble des polynômes de degré ÉGAL à n N'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ – il ne contient même pas le polynôme nul !

Exemple 27 - Le principe de superposition revisité. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur un intervalle non vide est un espace vectoriel

Exemple 28

- L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
- C'est aussi le cas des suites récurrentes linéaires.

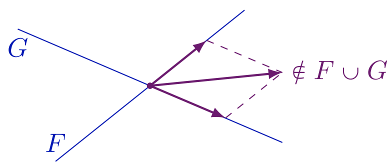
Théorème 29 - Intersections de sous-espaces vectoriels. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit I un ensemble non vide et $\{F_i\}_{i \in I}$ un ensemble de sous-espaces vectoriels de E. On souhaite établir que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Or :

- $F \subset E$;
- Pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E, ainsi $0_E \in F$;
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$. Pour tout $i \in I$, puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E et $x, y \in F_i$, $\lambda x + \mu y \in F_i$. Ainsi, $\lambda x + \mu y \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

■

✖ **Attention !** ✖ En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels N'est PAS un sous-espace vectoriel en général – la stabilité par addition n'est clairement pas assurée !



1.4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

Définition-Proposition 30 - Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie finie de E.

(i) L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X, noté $\mathrm{Vect}(X)$, est un sous-espace vectoriel de E, appelé le *sous-espace vectoriel (de E) engendré par X*. Si $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on le note aussi $\mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

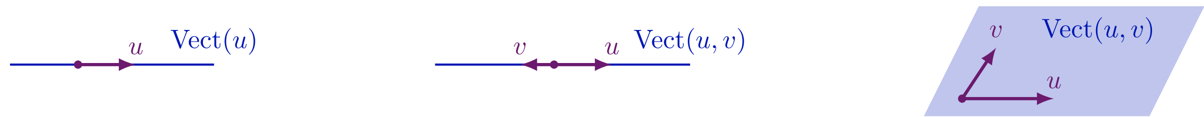
(ii) $\mathrm{Vect}(X)$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X. Cela signifie que $\mathrm{Vect}(X)$ contient X et que tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\mathrm{Vect}(X)$.

Démonstration.

(i) Montrons que $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E, où $X = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$:
- Par définition, $\mathrm{Vect}(X) \subset E$;
- $0_E \in \mathrm{Vect}(X)$, puisque $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i$;
- $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire. En effet...

(ii) Montrons que $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X, avec $X = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'une part, on a bien $X \subset \mathrm{Vect}(X)$, puisque, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} x_j$. D'autre part, la stabilité par combinaison linéaire implique qu'un sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi toutes les combinaisons linéaires de X, *i.e.* $\mathrm{Vect}(X)$.

■



✎ En pratique ✎ Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple 31 Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left((1,2)\right)$ est la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ et dirigée par $(1,2)$.

Exemple 32 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^n\right)$.

Exemple 33 Le plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + 3z = 0$ passe par le point $(0,0,0)$ et est dirigé par les vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,3,1)$. Montrer que $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(0,3,1)\right)$.
En effet, $\mathscr{P} = \{(x, 2x+3z, z)\}_{x,z\in\mathbb{R}} = \{x(1,2,0) + z(0,3,1)\}_{x,z\in\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(0,3,1)\right)$.

Exemple 34 La droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$ passe par le point $(0,0,0)$ et est dirigée par le vecteur $(1,-2,3)$. Montrer que $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}\left((1,-2,3)\right)$.
En effet, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \in \mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_1 + \tfrac{1}{3}L_2 \iff y = -2x \text{ et } z = 3x.$$

Finalement $\mathscr{D} = \{(x, 2x, 3x)\}_{x\in\mathbb{R}} = \{x(1,-2,3)\}_{x\in\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left((1,-2,3)\right)$.

Exemple 35 Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille 2 à coefficients réels.

Exemple 36 Si l'ensemble des scalaires est $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(1) = \{a \times 1\}_{a\in\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Vect}(1,i) = \{a \times 1 + b \times i\}_{a,b\in\mathbb{R}} = \mathbb{C}$. En revanche, si l'ensemble des scalaires est $\mathbb{C}$, $\mathrm{Vect}(1) = \{a \times 1\}_{a\in\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

Proposition 37 - Propriétés des Vect. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X et Y des parties finies de E et $x, a, b \in E$.

(i) Inclusion. Si $X \subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel qui contient une famille finie $(x_i)_{i=1,\dots,n}$, alors il contient aussi $\mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

(ii) Oter un vecteur. Si $x \in X$ est combinaison linéaire des autres éléments de X, i.e. $x \in \mathrm{Vect}(X\backslash\{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}\left(X\backslash\{x\}\right)$.

(iii) Remplacer un vecteur. Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, alors

$$\mathrm{Vect}(X \cup \{a\}) = \mathrm{Vect}(X \cup \{b\}).$$

Démonstration.

(i) Toute combinaison linéaire de X est évidemment une combinaison linéaire de Y !

(ii) Soit $x \in X$ tel que $x \in \mathrm{Vect}(X\backslash\{x\})$. D'après **(i)**, $\mathrm{Vect}(X\backslash\{x\}) \subset \mathrm{Vect}(X)$. Pour l'inclusion réciproque, $\mathrm{Vect}(X\backslash\{x\})$ est un sous-espace vectoriel contenant $X\backslash\{x\}$, or il contient aussi x par hypothèse, donc X et ainsi $\mathrm{Vect}(X)$.

(iii) D'une part, $\mathrm{Vect}\,(X \cup \{a\})$ contient X et a, donc aussi b par hypothèse, donc $X \cup \{b\}$ et finalement $\mathrm{Vect}\,(X \cup \{b\})$. D'autre part, remarquons par hypothèse que $b = \lambda a + x$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $x \in \mathrm{Vect}(X)$. Ainsi $a = \dfrac{1}{\lambda}(b - x)$ et a est combinaison linéaire de $X \cup \{b\}$ avec un coefficient non nul sur b. Les rôles de a et b sont finalement symétriques.

■

✎ **En pratique** ✎ Ces règles doivent être mise en pratique plutôt qu'être apprises sous la forme de formule abstraites, voir l'exemple suivant.

Exemple 38 Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,0),\underbrace{(1,3,0)}_{\substack{\text{Combinaison linéaire}\\ \text{de (1,1,0) et (0,1,0)}}}) &= \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(0,1,0)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,0)-(0,1,0),(0,1,0)\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0)\right) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}\,.\end{aligned}$$

2 Familles de vecteurs

2.1 Parties et familles génératrices

Définition 39 - Partie/famille génératrice (finie).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (ou la partie $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$) est *génératrice de* E ou *engendre* E lorsque tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, *i.e.* $E = \mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 40 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 41 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, ainsi $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$. De même, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$, $(x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$, donc $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{K}^3$. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, ..., $e_n = (0,\ldots,0,1)$. La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. En effet, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1,\ldots,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Exemple 42 La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, puisque, pour tout $a,b,c,d \in \mathbb{K}$,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![1\,,n]\!]$ et $j \in [\![1\,,p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i,j), égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est alors génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, puisque, pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}$.

Pouvez-vous donner une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, puis de $A_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques ?

Exemple 43 La famille $(1, i)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Le théorème qui suit n'est qu'une simple reformulation du théorème 37 de propriétés des Vect.

Proposition 44 - Propriétés des parties génératrices. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X et Y deux parties finies de E.

- **(i) Inclusion.** Si X engendre E et $X \subset Y$, alors Y engendre E.
  (Toute « sur-famille » d'une famille génératrice est génératrice.)
- **(ii) Oter un vecteur.** Si X engendre E et si $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $X \setminus \{x\}$ engendre E.
- **(iii) Remplacer un vecteur.** Si $X \cup \{a\}$ engendre E et si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, alors $X \cup \{b\}$ engendre E.

✎ **En pratique** ✎ Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel revient à l'écrire comme un Vect.

Exemple 45 L'ensemble $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

En effet, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $\quad (x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} z = x + 2y \\ t = -x + y \end{cases}$,

ainsi $E = \{(x, y, x + 2y, -x + y)\}_{x,y\in\mathbb{R}} = \{x(1, 0, 1, -1) + y(0, 1, 2, 1)\}_{x,y\in\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1)\right)$.
Ceci montre SIMULTANÉMENT que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$ engendre E.

Exemple 46 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X^2 - 4X + 3$.

En effet, pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$P \in F \iff 2P(X+1) = XP' \iff 2a(X+1)^3 + 2b(X+1)^2 + 2c(X+1) + 2d = X\left(3aX^2 + 2bX + c\right)$$
$$\iff \begin{cases} 2a = 3a \\ 6a + 2b = 2b \\ 6a + 4b + 2c = c \\ 2a + 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 4b + c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = -4b \\ d = 3b. \end{cases}$$

Ainsi $F = \left\{bX^2 - 4bX + 3b\right\}_{b\in\mathbb{R}} = \left\{b\left(X^2 - 4X + 3\right)\right\}_{b\in\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 4X + 3\right)$.
Ceci montre SIMULTANÉMENT que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\left(X^2 - 4X + 3\right)$ engendre F.

2.2 Parties et familles libres ou liées

Définition 47 - Partie/famille libre d'un nombre fini de vecteurs. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de E. Cette famille est dite *libre* (ou encore les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits *linéairement indépendants*) lorsque :

$$\forall\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\right).$$

Remarque 48 - Identification des coefficients pour une famille libre. De manière équivalente, une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre lorsque :

$$\forall\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right),$$

En résumé :

FAMILLE GÉNÉRATRICE	=	EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire.
FAMILLE LIBRE	=	UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, ce qui autorise les IDENTIFICATIONS.

Définition 49 - Partie/famille liée d'un nombre fini de vecteurs, couple de vecteurs colinéaires.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$. La partie $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ou la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dite *liée* ou les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits *linéairement dépendants* lorsque la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ N'EST PAS libre. Ceci équivaut à ce qu'AU MOINS UN des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ soit combinaison linéaire des autres.
- Soit $x, y \in E$. Les vecteurs x et y sont dits *colinéaires* lorsque la paire $\{x, y\}$ est liée, *i.e.* lorsque x ou y est un multiple de l'autre.

Dire que $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée revient à dire qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \text{ et } \exists i_0 \in [\![1\,, n]\!]\,, \quad \lambda_{i_0} \neq 0 \right)$, auquel cas $x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_0}} \lambda_i x_i$, *i.e.* x_{i_0} est « combinaison linéaire des autres x_i ».

Exemple 50 - Des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $((2,1,2), (1,0,2), (0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Et $((2,1,2), (1,0,2), (0,1,1), (8,4,11))$?

Les trois famille suivantes sont libres quasiment par définition :

Exemple 51 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE FAMILLE DE SCALAIRES.

En effet, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ainsi l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (0, \ldots, 0)$ implique directement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemple 52 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UN POLYNÔME.

Exemple 53 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$ et $j \in [\![1\,, p]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j), égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est alors libre dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE.

Exemple 54 Toute partie/famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée.
En effet, le vecteur nul est combinaison linéaire – à coefficients tous nuls - de n'importe quelle famille de vecteurs.

Exemple 55 - Famille formée d'un vecteur. Toute partie famille formée d'un seul vecteur est libre si et seulement si le vecteur est non nul.

Exemple 56 - Famille formée de deux vecteurs. Toute partie $\{x, y\}$ (ou famille (x, y)) formée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs sont non colinéaires.

✖ **ATTENTION !** ✖ Cette règle, très pratique, est FAUSSE lorsqu'on a plus de deux vecteurs ! Ainsi, la famille de $\mathbb{R}^2$ suivante : $((1,1), (1,0), (0,1))$ est liée sans qu'aucun des vecteurs ne soient colinéaires à un autre.

Exemple 57 La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ – principe d'IDENTIFICATION DES PARTIES RÉELLE ET IMAGINAIRE – mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

En effet, la famille est liée sur $\mathbb{C}$ puisque $i = i \times 1$.

Définition-Proposition 58 - Famille de polynômes échelonnée en degré.
Toute famille $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes NON NULS de $\mathbb{K}[X]$ pour laquelle $\deg P_1 < \ldots < \deg P_n$ est dite *échelonnée* (en degré). Une telle famille est libre.

Le cadre précédent a un analogue naturel dans $\mathbb{K}^n$:

Exemple 59 - Famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs NON NULS de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons i_k l'indice de la première coordonnée non nulle de u_k. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite échelonnée lorsque la suite $(i_1, \ldots, i_n)$ est strictement croissante. Le cas échéant, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

La famille $((1,0,2,-1),(0,0,3,2),(0,0,0,-5))$ est une famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et est donc libre.

Exemple 60 La famille $((2,1),(-1,3),(0,2))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.

En effet, pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda(2,1) + \mu(-1,3) + \nu(0,2) = (0,0) \iff \begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu + 2\nu = 0 \end{cases}$ et ce système possède des solutions (λ, μ, ν) autres que $(0,0,0)$, *e.g.* $\left(1, 2, -\frac{7}{2}\right)$. Ainsi les vecteurs $(2,1)$, $(-1,3)$ et $(0,2)$ sont linéairement dépendants.

Exemple 61 La famille $\left(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
En effet, pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda\left(X^2 - X + 1\right) + \mu\left(X^2 + X - 2\right) + \nu\left(X^2 - 2X + 3\right) = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda - 2\mu + 3\nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 & \\ 2\mu - \nu = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3\mu - 2\nu = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 & \\ 2\mu - \nu = 0 & \\ \mu = 0 & L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Exemple 62 La famille $(\sin, \cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

En effet, si pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin + \mu \cos = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$, alors, en particulier, $\lambda \sin 0 + \mu \cos 0 = 0$ et $\lambda \sin \frac{\pi}{2} + \mu \cos \frac{\pi}{2} = 0$, ce qui entraîne $\lambda = \mu = 0$.

Théorème 63 - Propriétés des parties libres/liées.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X et Y deux parties finies de E.

(i) Inclusion. Si Y est libre et si $X \subset Y$, alors X est libre.
Par contraposition, si X est liée et si $X \subset Y$, alors Y est liée.
(Toute « sous-famille » d'une famille libre est libre / Toute « sur-famille » d'une famille liée est liée.)

(ii) Ajout d'un vecteur. Si X est libre, alors

$$X \cup \{y\} \text{ est libre} \iff y \notin \operatorname{Vect} X.$$

Démonstration.

(i) Si X est liée et si $X \subset Y$, alors l'un des vecteurs de X est combinaison linéaire des autres vecteurs de X et donc a fortiori l'un des vecteurs de Y est combinaison linéaire des autres.

(ii) Le sens direct est clair. Réciproquement, supposons $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ libre et donnons-nous $y \in E$ NON combinaison linéaire de X. Pour montrer que $X \cup \{y\}$ est libre, donnons-nous $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \mu y = 0_E$. Si $\mu \neq 0$, alors $y = -\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ et la liberté de X assure que $\lambda_i = 0$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

■

Dire qu'une famille est libre revient à dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Ainsi, si l'on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, il est nécessaire de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs, autrement dit veiller à n'ajouter que des vecteurs linéairement indépendants de ceux déjà présents.

2.3 Bases

Définition 64 - Base. Une famille $\mathscr{B}$ est une *base de* E lorsque $\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de E

La résultat suivant est évident mais très important :

Définition-théorème 65 - Coefficients dans une base. Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une unique façon comme une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$, autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

La famille de scalaires $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ est appelée la *famille des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.*

Les bases sont toujours des FAMILLES et non des ensembles.

Le résultat suivant est une synthèse des exemples précédents (cf. exemples 41 à 42 et 51 à 53).

Théorème 66 - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **Familles de scalaires.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$
La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ – dite *base canonique.*
- **Polynômes.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ – dite *base canonique.*
- **Matrices.** Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note, pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$ et $j \in [\![1\,, p]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j), égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ – dite *base canonique.*

Le qualificatif « canonique » doit être compris au sens de « la plus naturelle ». On veillera à ne pas l'utiliser à tort et à travers ! De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique sont... ce vecteur lui-même ! On peut difficilement faire plus simple.
- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est la famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de ses coefficients.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille de coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$... *i.e.* A elle-même.

Exemple 67 La famille $((1,1),(1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

En effet, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

- Nous voulons établir « $\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)=a(1,1)+b(1,-2)$ ». Or, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x,y)=a(1,1)+b(1,-2)\iff\left\{\begin{array}{rcl} a+b&=&x\\ a-2b&=&y\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcll} a+b&=&x&\\ 3b&=&x-y&L_2\leftarrow L_1-L_2\end{array}\right.$$

  et, étant triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution.
- Si l'on veut en outre connaitre les coordonnées du vecteur (x,y) dans la base $((1,1),(1,-2))$, il ne reste qu'à achever la résolution du système précédent. Tous calculs faits, ses coordonnées sont $(a,b)=\left(\dfrac{2x+y}{3},\dfrac{x-y}{3}\right)$.

Exemple 68 Montrer que la famille $\mathcal{B}=((1,1,1),(1,2,3),(2,4,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $x\in\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $(3,1,20)$. Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 69 La famille $\left(X^2+X,X^2+1,X+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

En effet, plutôt que de montrer en deux temps le caractère libre et générateur de ladite famille, procédons plus efficacement en établissant que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est combinaison linéaire d'une unique façon de X^2+X, X^2+1 et $X+1$:

$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\quad \exists!(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3,\quad P=\lambda\left(X^2+X\right)+\mu\left(X^2+1\right)+\nu(X+1).$$

Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$,

$$P=\lambda\left(X^2+X\right)+\mu\left(X^2+1\right)+\nu(X+1)\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&a\\ \lambda+\nu&=&b\\ \mu+\nu&=&c\end{array}\right.\quad\text{après identification}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcll}\lambda+\mu&=&a&\\ \mu-\nu&=&a-b&L_2\leftarrow L_1-L_2\\ \mu+\nu&=&c&\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcll}\lambda+\mu&=&a&\\ \mu-\nu&=&a-b&\\ \nu&=&\dfrac{-a+b+c}{2}&L_3\leftarrow\frac12L_3-\frac12L_2.\end{array}\right.$$

Le système est donc triangulaire à coefficients diagonaux non nuls et admet donc une unique solution.

✎ **En pratique** ✎ Pour déterminer une base d'un espace vectoriel, on en cherche initialement une famille génératrice en écrivant celui-ci comme un Vect, puis on essaie d'établir que la famille obtenue est libre.

Exemple 70 La famille $((2,1,1))$ est une base du sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^3$ défini par $\left\{\begin{array}{rcl}2x-y-3z&=&0\\ 3x-2y-4z&=&0.\end{array}\right.$

En effet, On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x-y-3z&=&0\\ 3x-2y-4z&=&0.\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=2z\\ y=z.\end{array}\right.$$

Ainsi $A=\{(2z,z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((2,1,1)\right)$.

Exercice 71 On rappelle qu'étant donnée une matrice M, sa trace $\mathrm{tr}(M)$ est la somme de ses coefficients diagonaux. Alors, l'ensemble F des matrices $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T=M+\mathrm{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

En effet, Déterminons de façon autonome une telle base.

- Pour tout $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\quad A\in F\iff\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(a+d)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\iff d=-a$ et $c=b$. Ainsi $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\right\}_{a,b\in\mathbb{R}}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ et en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Il nous reste à vérifier que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est libre. Or, pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, si $\lambda\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$, clairement $\lambda=\mu=0$.

Exemple 72 (Exemple transverse riche et difficile) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $\left(1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, \ldots, (X-\lambda)^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $\left(P(\lambda), P'(\lambda), \dfrac{P''(\lambda)}{2}, \ldots, \dfrac{P^{(n)}(\lambda)}{n!}\right)$.

En effet,

- Pour la liberté :
  - ⋆ **Méthode 1.** Supposons que $\sum_{i=0}^{n} a_i (X-\lambda)^i = 0$, pour $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Par composition à droite par $X+\lambda$, $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i = 0$ et aussitôt $a_0 = \ldots = a_n = 0$.
  - ⋆ **Méthode 2.** On peut aussi remarquer que la famille en jeu est échelonnée en degré.
- D'après la formule de Taylor polynomiale, $P = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} (X-\lambda)^i$, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, la famille $\left(1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, \ldots, (X-\lambda)^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ et la formule donne aussi les coordonnées de P.

3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 73 - Somme de deux espaces vectoriels. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On appelle somme de F et G le sous-ensemble de E défini comme

$$F + G = \{x + y, x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E, qui est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de F et de G.

✖ **Attention !** ✖ Ce n'est pas l'addition standard que vous connaissez, mais une nouvelle manière de définir un ensemble. On éviter les règles de calculs sur ce symbôle $+$, ou encore de faire la différence de sous-espaces vectoriels

Théorème 74 - Partie génératrice d'une somme de deux sous-espaces vectoriels.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est aussi le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G, ce qui signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient également $F+G$. Autrement dit, $F + G = \mathrm{Vect}\,(F \cup G)$.
De plus, soient X et Y deux parties finies de E. Alors

$$\mathrm{Vect}\,(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

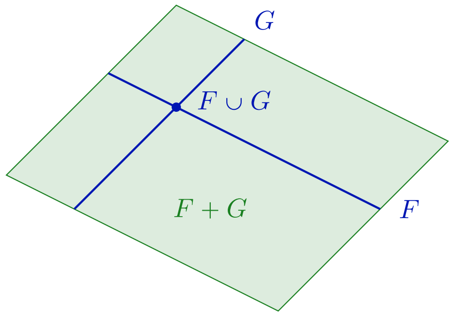
Autrement dit, si X (resp. Y) est une partie génératrice de F (resp. de G), alors $X \cup Y$ est une partie génératrice de $F+G$.

Démonstration. Notons $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et $Y = \{y_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\,(X \cup Y) &= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \;\middle|\; (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{K}^m \text{ et } (\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{K}^m \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \;\middle|\; (\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(X) + \mathrm{Vect}\,(Y).
\end{aligned}$$

■

✖ **ATTENTION !** ✖ Il ne faut pas confondre SOMME et RÉUNION ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général (cf. exercice 15.6).



Exemple 75 $E+E = E$, $E+\{0_E\} = E$ et $\{0_E\}+\{0_E\} = \{0_E\}$.

Exemple 76 Les droites vectorielles $F = \text{Vect}\,((1,0,0))$ et $G = \text{Vect}\,((0,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$ ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.

En effet, $F + G = \{(x,0,0)\}_{x\in\mathbb{R}} + \{(0,y,0)\}_{y\in\mathbb{R}} \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,0,0)+(0,y,0)\}_{x,y\in\mathbb{R}} = \{(x,y,0)\}_{x,y\in\mathbb{R}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}$.

Définition 77 - Somme directe. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On dit que la somme $F + G$ est directe lorsque

$$\forall u \in F+G, \quad \exists!(x,y) \in F\times G, \quad u = x+y$$

On note alors $F + G = F \bigoplus G$.

Exemple 78 - Une sommes directes. Montrer que dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont en somme directe.

Proposition 79 - Caractérisation des sommes directes (très utile). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Exemple 80 Dans $\mathbb{K}^3$, le plan $F = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ et la droite $G = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 \;\middle|\; x=y=z\right\}$ sont en somme directe.

En effet, on montre sans difficulté que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E (en les écrivant par exemple comme des Vect). En outre, soit $(x,y,z)\in F\cap G$, alors $x+y+z=0$ et $x=y=z$, donc $x=y=z=0$, *i.e.* $(x,y,z) = (0,0,0)$. Ainsi $F\cap G = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.

Exemple 81 - Encore des sommes directes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, les sous espaces $F = \text{Vect}((2,1,2),(1,0,2))$ et $G = \text{Vect}((6,-1,0))$ sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$? Et $\text{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$ et $\text{Vect}((1,1,1))$?
2. Et les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F = \text{Vect}((1,1,1,2),(1,2,3,1))$ et $G = \text{Vect}((2,0,4,1))$?

Définition 82 - Espaces supplémentaires. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F et G sont supplémentaire *dans* E lorsque

$$E = F \bigoplus G.$$

De manière équivalente :

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x,y)\in F\times G, \quad u = x+y.$$

Cette définition est en fait assez proche de la notion de base, mais avec deux sous-espaces vectoriels à la place d'une famille de vecteurs. Noter que cette écriture indique deux choses la somme est directe, et vaut E entier.

Exemple 83 - Des supplémentaires.

1. Reprendre les exemples précédents et dire si les sommes sont supplémentaires dans l'espace vectoriels de chaque exemple.
2. Notons $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que F et G les sous-ensembles des fonctions de E qui sont paires et impaires, respectivement. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires dans E.
3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base. Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = 0\}$. Mêmes questions que ci-dessus mais dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

✖ Attention ! ✖

- Il ne faut pas confondre les notions de « supplémentaire dans E » et de « somme directe ». Dire que F et G sont en somme directe revient à affirmer que tout vecteur de E admet AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Dire que F et G sont supplémentaires dans E revient à affirmer en plus que $E = F + G$ et donc que tout vecteur de E admet EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? Oui, toutefois nous le démontrerons seulement en dimension finie (dans le chapitre dédié à la dimension).
- Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité (cf. exemples 84 et 85 ci-dessous).
- Il ne faut pas non plus confondre la notion vectorielle de « supplémentaire » avec celle ensembliste de « complémentaire ». D'une part, il y a absence d'unicité pour la supplémentarité, alors qu'il y a unicité du complémentaire. D'autre part, un supplémentaire est un sous-espace vectoriel, tandis que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient même pas le vecteur nul.

Exemple 84 Deux droites NON CONFONDUES passant par $(0, 0)$ sont toujours supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Si P est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ et D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ NON CONTENUE DANS P, alors P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 85 La droite $G_\alpha = \operatorname{Vect}((1, \alpha, 1))$ est un supplémentaire de $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0\right\}$ dans $\mathbb{R}^3$, pour tout $\alpha \neq -2$.

En effet, soit $\alpha \neq -2$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, montrons que (x, y, z) s'écrit d'une unique manière comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G_α. Pour tous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(1, \alpha, 1) \text{ et } (a, b, c) \in F \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \alpha\lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} a & & & + & \lambda & = & x \\ & b & & + & \alpha\lambda & = & y \\ & & c & + & \lambda & = & z \\ & & & & (2+\alpha)\lambda & = & x + y + z \qquad L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 - L_4 \end{array}\right.$$

Or $\alpha \neq -2$, ainsi le système est de Cramer (triangulaire de coefficients diagonaux non nuls) et possède comme souhaité une unique solution. Remarquons que lorsque $\alpha = -2$, on a $G_\alpha \subset F$, ainsi G_α et F ne sauraient être supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 86 L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, on souhaite établir « $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exists!(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A$ ». Procédons par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$. Alors ${}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}S + {}^{\mathrm{t}}A = S - A$. Ainsi, par demi-somme et demi-différence, $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^{\mathrm{t}}M\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^{\mathrm{t}}M\right)$. Sous réserve d'existence, il y a donc unicité.
- **Synthèse.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^{\mathrm{t}}M\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^{\mathrm{t}}M\right)$. Alors $M = S + A$, $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, car
$${}^{\mathrm{t}}S = {}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{1}{2}\left(M + {}^{\mathrm{t}}M\right)\right) = \frac{1}{2}\left({}^{\mathrm{t}}M + {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M)\right) = \frac{1}{2}\left({}^{\mathrm{t}}M + M\right) = S$$
et de même ${}^{\mathrm{t}}A = -A$.

Exemple 87 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n, $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$, où $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
Indication : pour un polynôme A quelconque, comment l'écrire $A = PQ + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$?

En effet, pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, d'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A = PQ + R$.